d'arribar a conseqüències demostrables. Maddy acaba així:

> El que he intentat és una modesta contribució a aquest projecte. El pas següent, l'avaluació d'aquesta evidència, és una tasca descoratjadora, però jo pretenc que la teoria de conjunts realista s'enfronti a aquesta prova amb la companyia distingida de pensadors que representen una àmplia gamma de filosofies matemàtiques enfrontades, l'estructuralisme, el modalisme i una versió del nominalisme entre elles.

Recomano molt aquest llibre, seriós i provocatiu, sobre tot als matemàtics i a les matemàtiques amb aficions filosòfiques.

Ens ha semblat que podíem cloure aquesta secció de **Llibres** tot enllaçant els dos articles. Transcrivim un fragment de les CONCLUSIONS del llibre de Josep Pla pel qual l'IEC li va atorgar el Premi Ferran Sunyer i Balaguer.

> Hem vist com certs resultats importants de la matemàtica actual —que són *indecidibles* en el si de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel, àdhuc si hi afegim l'axioma de l'elecció o la hipòtesi general del continu— admeten una resposta o bé una altra, segons quina sigui la *ulterior* teoria de conjunts que ens procurem.
>
> Així doncs, hem vist de quina manera axiomes diferents ens procuren resultats oposats —o, si més no, divergents— de certs problemes purament matemàtics que, en el si de la *teoria usual de conjunts*, restaven com a qüestions obertes. De fet, hem establert la *indecidibilitat*, a **Z.-F.**, d'aquestes qüestions.

[JOSEP PLA I CARRERA. *Axiomes alternatius de la teoria de conjunts i llur influència en matemàtiques.* **Premi Ferran Sunyer i Balaguer 1992. IEC. Barcelona, 1993]**

Us deixem l'anàlisi a vosaltres, lectores i lectors.

Problemes

Problemes proposats

A26. Sigui n un enter positiu donat i considerem $f(x) = x^n$ on $x = 1, 2, 3, \ldots$ Els dígits de $f(1), f(2), \ldots$ es col·loquen uns a continuació dels altres per a formar un decimal infinit que anomenen y_n:

$$y_n = 0, \langle f(1)\rangle\langle f(2)\rangle\langle f(3)\rangle \ldots$$

Per exemple,

$$y_2 = 0,1491625364964\ldots$$

Quins valors de n fan que y_n sigui racional?

A27. Dues circumferències són tangents interiorment en el punt T. Sigui AB una corda de la circumferència exterior tangent a la circumferència interior en el punt P. Demostreu que TP és la bisectriu de l'angle $\widehat{ATB}$.

A28. (Proposat per Edgar Güeto de la FME de la UPC) Proveu que per a qualssevol m, n enters positius, existeixen $r, (r \geq 3)$ nombres enters positius $m < a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ tals que

$$n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_r}.$$

A29. (Proposat per Edgar Güeto de la FME de la UPC) Si n és un enter positiu, definim

$$r(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

on $[x]$ denota la part entera de x. Trobeu els n pels quals $r(n) + 1 = r(n+1)$.

A20. De quantes maneres es pot descompondre un enter positiu n en suma d'enters positius més petits si considerem diferents aquelles sumes que o bé contenen sumands diferents o bé difereixen en l'ordre dels sumands?

Solució (Redacció.) Si admetem també la descomposició $n = n$, podem identificar cadascuna de les diferents sumes del problema amb una decomposició de l'interval $[0, n[$ mitjançant alguns dels punts de divisió $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Per cadascun d'aquests punts hi ha dues possibilitats: ser escollit o no, independentment dels altres $n-2$ punts. El nombre total d'eleccions és doncs de 2^{n-1} i, eliminant l'opció $n = n$, ens quedem amb el nombre de descomposicions que buscàvem: $2^{n-1} - 1$.
Altres idees: L'Anna Pol de l'IES Jaume Vicens Vives de Girona ha donat una solució per inducció.

A21. Un tauler d'escacs 6×6 s'omple amb fitxes de dòmino (2×1) ben collocades, és a dir, ocupant dos quadradets. Demostreu que sempre és possible tallar el tauler en dues parts mitjançant una línia recta que no talli cap fitxa.

Solució (Anna Pol, IES Jaume Vicens Vives, Girona). Si volguéssim aconseguir que el tauler **no** es pogués tallar per cap línia recta horitzontal ni vertical sense tallar cap fitxa, hem d'aconseguir recobrir tot el tauler correctament de manera que totes les línies, tant horitzontals com verticals, estiguin tallades per alguna fitxa. Observem els dos fets següents:

a) Si amb les fitxes ben collocades tapem tots els quadradets, a cada fila podem trobar $0, 1, 2$ o 3 fitxes en sentit horitzontal. Per tant, els quadradets d'una fila poden estar tapats per $0, 2, 4$ o 6 fitxes en sentit vertical.

b) Si una fitxa posada en sentit vertical tapa dos quadradets de dues files consecutives, hi ha com a mínim una altra fitxa vertical que tapa dos quadradets de les mateixes files.

L'afirmació *a*) és força evident. Per veure *b*), suposem que la primera fila on trobem fitxes verticals és la fila k. Per *a*), com a mínim n'hi ha una altra i n'hi poden haver en total $2, 4$ o 6 i llavors es compleix allò que volíem demostrar. Si no n'hi ha 6, a la fila $k+1$ podem trobar una fitxa vertical que tapi també un quadradet de la fila $k+2$ o no trobar-ne cap:

- si n'hi ha una, donat que 2 o 4 quadradets ja estan ocupats per les fitxes anteriors, com a mínim n'hi ha d'haver una que també tapi un quadradet de la fila $k+2$.
- si no n'hi ha cap, a la següent fila que trobem fitxes verticals tornarem a estar en la mateixa situació que a la fila k.

En conseqüència, a partir de la fila k, en qualsevol fila que trobem una fitxa vertical, estarem en la situació de la fila k o bé de la fila $k+1$. Es compleix doncs l'afirmació *b*).

Per *a*) i *b*), calen com a mínim dues fitxes verticals per trepitjar cadascuna de les 5 línies horitzontals. Això fa un mínim de 10 fitxes. Per simetria, canviant files per columnes, ens calen com a mínim 10 fitxes en posició horitzontal per trepitjar les 5 línies verticals del tauler. En total ens calen doncs 20 fitxes com a mínim per a trepitjar totes les línies del tauler, que en total taparan 40 quadradets. Com que en el tauler només hi tenim 36 quadradets, no podrem doncs trepitjar totes les línies i n'existirà sempre almenys una de no trepitjada que permetrà dividir el tauler en dues parts tal i com ens demanava el problema.

A22. Donat un triangle ABC, tracem les dues bisectrius corresponents als angles A i B. Pel vèrtex C, tracem les paralleles a cadascuna d'aquestes bisectrius i anomenem D i E els punts de tall amb elles. Demostreu que si la recta DE és paral·lela al costat AB, el triangle és isòsceles.

Solució (Miguel Amengual Covas de Cala Figuera, Mallorca). Siguin $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ i $c = \overline{AB}$. Anomenem A' i B' les interseccions de les rectes CE i CD amb la recta AB. En ser $\widehat{CA'A}$ i $\widehat{DAB}$ corresponents i AD bisectriu de l'angle $\widehat{A}$ en el triangle $\triangle ABC$:

$$\widehat{CA'A} = \widehat{DAB} = \frac{\widehat{A}}{2},$$

i, en ser $\widehat{CAB}$ exterior al triangle $\widehat{A'AC}$, tenim que

$$\widehat{CAB} = \widehat{CA'A} + \widehat{ACA'},$$

i, per tant,

$$\widehat{ACA'} = \widehat{CAB} - \widehat{CA'A} = \widehat{A} - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Conseqüentment, el triangle $\triangle A'AC$ és isòsceles amb

$$\overline{A'A} = \overline{CA} = b.$$

En el triangle $\triangle A'BC$, el segment CE determinat per la bisectriu de l'angle $\widehat{B}$ val

$$\overline{CE} = \frac{\overline{CA'} \cdot b}{a+b+c}.$$

Per tant,

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CA'}} = \frac{b}{a+b+c}. \qquad (1)$$

Igualment és també isòsceles el triangle $\triangle CBB'$ amb $\overline{BB'} = \overline{BC} = a$; en el triangle $\triangle AB'C$, el segment CD determinat per la bisectriu de l'angle $\widehat{A}$ verifica

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CB'}} = \frac{a}{a+b+c}. \qquad (2)$$

Ara, si la recta DE és paral·lela al costat AB, els triangles $\triangle CED$ i $\triangle CAB'$ són semblants i es compleix,

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB'}},$$

igualtat de la qual, tenint en compte (1) i (2), es dedueix immediatament que

$$a = b.$$

Altres idees: L'Anna Pol de l'IES Jaume Vicens Vives de Girona ha donat una altra solució.

Tesis

- CARLES BARCELÓ I VIDAL va llegir la seva tesi, dirigida per Vera Pawlowsky, titulada *Mixturas de datos composicionales*, el dia 31 d'octubre de 1996. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

- NEUS CÒNSUL PORRAS va llegir la seva tesi, dirigida per Joan de Solà-Morales Rubió, titulada *Equacions de difusió amb condicions de contorn no lineals*, el dia 9 de maig de 1997. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

- VERA SACRISTÁN ADINOLFI va llegir la seva tesi, dirigida per Ferran A. Hurtado Díaz, titulada *Optimización geométrica y aplicaciones en visibilidad*, el dia 14 de maig de 1997. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya.

- JAUME GUDAYOL I TORELLÓ va llegir la seva tesi, dirigida per Joaquim M. Ortega, titulada *Boundary behaviour of functions in Hardy-Sobolev spaces*, el dia 15 de setembre de 1997. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.

- MARTHA ÁLVAREZ RAMÍREZ va llegir la seva tesi, dirigida per Jaume Llibre, titulada *Dinámica del problema restringido isósceles de tres cuerpos en dimensión uno con primarios en órbita de colisión elíptica*, el dia 19 de setembre de 1997. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

- JAUME HARO CASES va llegir la seva tesi, dirigida per Xavier Mora, titulada *El límit clàssic de la mecànica quàntica*, el dia 26 de setembre de 1997. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.